

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۳/۹/۸

وقت : ۹۰ دقیقه



دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۱- فنی

(رشته‌های شیمی و مواد، معدن، نقشه برداری، ساخت و تولید)

نیمسال (اول / دوم) سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

توجه : از نوشتن با مداد خودداری نمائید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. ۲۵ نمره

(الف) $z^3 = -1 + \sqrt{3}i$ (ب) $z^2 - 2iz + 3 = 0$

سوال ۲- تابع $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. ۱۵ نمره

(الف) یک به یک بودن تابع را بررسی کنید. (ب) معکوس تابع را در صورت وجود بیابید.

سوال ۳- حدود زیر را بدست آورید : ۲۰ نمره

(الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$

سوال ۴- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ مشتق پذیر باشد. ۱۰ نمره

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases}$$

سوال ۵- مشتق تابع زیر را بدست آورید. ۱۰ نمره

$$f(x) = \frac{\tan 3x}{2x+3}$$

موفق باشید



پاسخ سوال ۱: الف) $z^3 = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \rightarrow z_k = e^{\frac{2k\pi}{3}i} \times e^{\frac{2\pi}{9}i}, k=0,1,2 \rightarrow z_0 = e^{\frac{2\pi}{9}i}, z_1 = e^{\frac{4\pi}{9}i}, z_2 = e^{\frac{6\pi}{9}i}$
ب) $z = i \pm \sqrt{-1-3} = i \pm 2i \rightarrow z_1 = 3i, z_2 = -i$

پاسخ سوال ۲: الف) برای اثبات یک به یک بودن تابع فرض می‌کنیم $f(a) = f(b)$ و باید نتیجه بگیریم $a = b$.
 $f(a) = f(b) \rightarrow \frac{3a-5}{\sqrt{a}-1} = \frac{3b-5}{\sqrt{b}-1}$
 $\rightarrow 21ab - 3a - 35b + 5 = 21ab - 3b - 35a + 5 \rightarrow 32a = 32b \rightarrow a = b$
ب) برای پیدا کردن وارون تابع جای x و y را عوض می‌کنیم.
 $x = \frac{3y-5}{\sqrt{y}-1} \rightarrow \frac{\sqrt{y}}{3} = \frac{21y-35}{21y-3} \rightarrow \frac{\sqrt{y}}{3-7x} = \frac{21y-35}{32} \rightarrow \frac{32\sqrt{y}}{3-7x} = 3y-5$
 $\rightarrow \frac{32\sqrt{y}}{3-7x} + 5 = 3y \rightarrow y = \frac{3x-15}{3(7x-3)}$

پاسخ سوال ۳: الف) $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} \xrightarrow{x=t^6} \ell_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^6} - \sqrt[3]{t^6}}{\sqrt{t^6} - 1}$
 $\rightarrow \ell_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - t^2}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2}{t^2+t+1} = \frac{1}{3}$
 $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{x-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
ب) $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{4x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 4 \times 1^2 = 4$

پاسخ سوال ۴: در نقطه $x=1$ باید سه مقدار حد چپ، حد راست و مقدار تابع یعنی
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+bx) = a+b$, $f(1) = a+b$
برابر باشند. پس $a+b=1$

همچنین باید مشتق چپ و راست تابع با هم برابر باشند. یعنی $f'(1^+) = f'(1^-)$
 $f'(x) = \begin{cases} a & x \geq 1 \\ 3x^2 & x < 1 \end{cases}$
پس $a=3$ و چون $a+b=1$ پس داریم $b=-2$.

پاسخ سوال ۵: $f'(x) = \frac{3(1+\tan^2 3x)(2x+3) - 2 \tan 3x}{(2x+3)^2}$